**Лекція 3.**

***Тема :* Тригонометричні функції числового аргументу.**

***Мета:*** Формування поняття тригонометричних функцій чис­лового аргументу; вивчення значень тригонометричних функцій деяких чисел (кутів), зміни знаків тригонометричних функцій у координатних чвертях.

**План лекції:**

**1.Зображення чисел на одиничному колі.**

**2.Значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса на одиничному колі.**

**3.Знаки значень тригонометричних функцій.**

1. **Зображення чисел на одиничному колі.**

Вимірюючи кути в радіанах, найменування одиниці вимірювання біля числа, що характеризує міру кута, зазвичай не пишуть. Уведення радіанної міри кута дає змогу зображати будь-яке число точкою одиничного кола. Розглянемо, як це можна зробити.

Як відомо, між дійсними числами і точками координатної прямої існує взаємно однозначна відповідність. Уявімо собі, що точка рухається по координатній прямій від початку координат. Якщо вона рухається у додатньому напрямі і пройде відстань, що дорівнює трьом одиницям виміру довжини, то вона потрапить у точку ***А(3).*** (рис.1)



***Рис.1***

Якщо ж вона рухається у напрямі, протилежному до напряму координатної прямої прямої, і пройде ту саму відстань, то вона потрапить у точку ***В(-3)*** (рис.1)

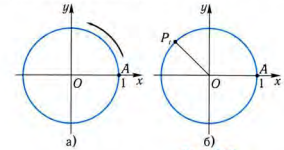
Звернемо увагу на те, що в обох випадках відстань, пройдена точкою, дорівнює модулю координати точки, в яку вона потрапляє.

Нехай маємо довільне число t. Вважатимемо, що точка рухається вздовж прямої , причому в додатному напрямі, якщо , і у від’ємному напрямі, якщо . Коли пройдена відстань дорівнюватиме **|,** точка потрапить у положення, що відповідає числу . Таким чином, кожному дійсному числу відповідає одна і тільки одна точка координатної прямої (рис.2 а,б). Відтак ми можемо не розрізняти число t точку .



***Рис.2***

Так само ми можемо не розрізняти ***міру кута обертання і число*** . Це дає змогу побудувати відповідність між дійсними числами і точками одиничного кола, користуючись вимірюванням відстані вздовж кола. Для цього на координатній площині розглянемо одиничне коло (тобто коло з радіусом 1) з центром у початку координат (рис.3, а) – його називають тригонометричним колом. Точку А з координатами (1; 0) називають початком відліку (на колі!). Довільне число t можна зобразити точкою на тригонометричному колі.



***Рис.3***

Нехай задано число Уявімо собі, що деяка точка рухається по тригонометричному колі. Свій рух вона починає з положення А. Вважатимемо, що вона рухається проти годинникової стрілки, тобто в додатному напрямі, якщо , і за годинниковою стрілкою, тобто у відємному напрямі, якщо

Якщо то точка знаходиться в точці А. Коли пройдена відстань дорівнюватиме **|,** точка потрапить у положення, що відповідає числу Позначимо точку, в яку вона потрапляє, через (рис.3,б). Точка збігається з точкою А.

Таким чином, кожному дійсному числу на тригонометричному колі відповідає точка. За побудовою, точку одержують з точки А за допомогою повороту її навколо початку кооринат на радіан, оскільки на одиничному колі довжина пройденого шляху дорівнює модулю радіанної міри кута повороту.

Будь-яке коло може розглядатися, як числове, але зручніше використовувати одиничне коло. **Одиничне коло - це коло, радіус якого береться за одиницю виміру.**

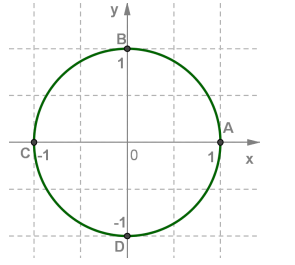
Довжина одиничного кола *l* дорівнює ***l=2π⋅R=2π⋅1=2π***

Вважаємо, що ***R=1.***

Якщо взяти ***π≈3,14***, тоді довжина кола ***l***може бути виражена числом:

***2π ≈ 2 \*3,14=6,28***

Будемо користуватися одиничним колом, в якому проведені горизонтальний і вертикальний діаметри ***CA і DB*** (рис.4)



***Рис.4***

Прийнято називати дугу ***AB*** - першою чвертю, дугу ***BC*** - другою чвертю, дугу ***CD*** - третьою чвертю, дугу ***DA*** - четвертою чвертю, причому, це відкриті дуги, тобто дуги без їх кінців.

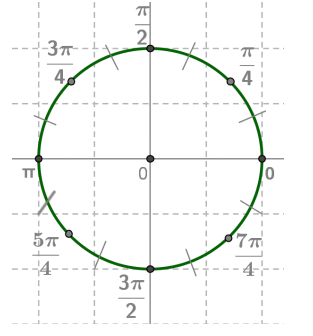
Довжина кожної чверті одиничного кола дорівнює  **⋅2π =**

Прийнято в позначенні дуги на першому місці писати букву, що позначає початок дуги, а на другому місці писати букву, що позначає кінець дуги.

Для роботи з числовим колом часто використовуються два макети числового кола.

**Перший макет.**

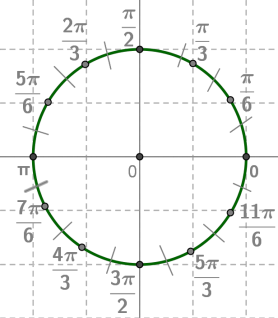
Кожна з чотирьох чвертей числового кола поділена на дві рівні частини і біля кожної з отриманих восьми точок записане число, якому вона відповідає (рис.5).



***Рис.5***

**Другий макет.**

Кожна з чотирьох чвертей числового кола поділена на три рівні частини і біля кожної з отриманих дванадцяти точок записане число, якому вона відповідає (рис.6).



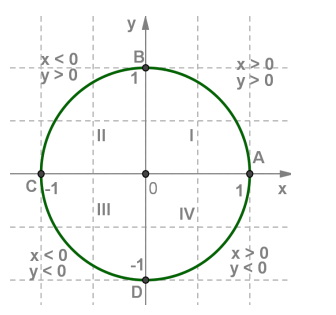
***Рис.6***

Для числового кола вірне наступне твердження:

Якщо точка M числового кола відповідає числу t, тоді вона відповідає і числу виду  ***t+2πk, k∈Z***

На зазначених двох макетах написані числа, відповідні точкам, при першому обході числового кола в додатному напрямку, тобто на проміжку [0;2π]

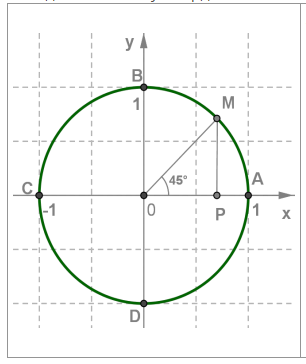
Розташуємо числове коло в координатній площини так, щоб центр кола зійшовся з початком координат, а його радіус приймаємо за одиничний відрізок.  
Початкова точка числового кола ***A*** поєднана з точкою (1;0). (рис.7).



***Рис.7***

Кожна точка числового кола має в координатній площини свої координати.

Знайдемо спочатку координати тих точок координатної площини, які отримані на макетах числового кола.



***Рис.8***

Точка ***M()*** середина I чверті.(рис.8)

Опустимо перпендикуляр ***MP*** на пряму ***OA*** і розглянемо трикутник ***OMP***. Оскільки дуга ***AM*** утворює половину дуги ***AB***, тоді ***∠MOP=45°*** . Отже, трикутник ***OMP*** - рівнобедрений прямокутний трикутник і ***OP=MP***, тобто у точки ***M*** абсциса і ордината рівні: ***x = y***.

Оскільки координати точки ***M(x;y)*** задовольняють рівняння числового кола , тоді для їх знаходження потрібно розв'язати систему рівнянь:

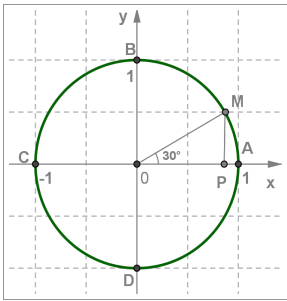
Підставивши ***x*** замість ***y*** в перше рівняння системи, отримаємо:

При розв'язанні враховуємо, що абсциса точки M додатна.

Отримали, що координати точки M, яка відповідає числу ,

будуть ***М (***

Міркуємо аналогічно для точки M, якщо тепер вона відповідає числу .(рис.9)



***Рис.9***

Трикутник ***MOP*** прямокутний. Так як дуга ***AM***складає третю частину дуги ***AB,*** то ***∠MOP=30°.***

Катет ***MP*** лежить проти кута ***30°*** градусів в прямокутному трикутнику, отже, дорівнює половині гіпотенузи, тобто ордината точки ***M*** дорівнює

Абсцису ***x*** точки ***M*** знайдемо, розв'язавши рівняння:

При розв'язанні враховуємо, що абсциса точки ***M*** додатна.

Отримали, що координати точки M, яка відповідає числу ,

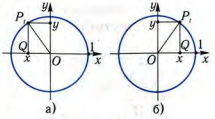
будуть  **;**

Аналогічно можна отримати координати і інших точок числового кола, враховуючи тільки знаки координат в кожній чверті.

**2.Значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса на одиничному колі.**

Узагальнимо поняття ***синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута*** на ***кути обертання чи на довільні числа***, які ми не будемо розрізняти.

Нехай задано довільне число , яке визначає точку на тригонометричному колі. Позначимо через ***(х; у)*** координати точки **.** (рис.10, а)

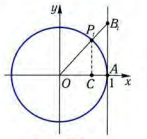


***Рис.10***

* **Синусом числа називається ордината точки**
* **Косинусом числа називається абсциса точки**
* **Тангенсом числа називається відношення синуса числа до його косинуса.**
* **Котангенсом числа називається відношення косинуса числа до його синуса.**

Кожному числу відповідає єдина точка тригонометричного кола, а отже, єдині абсциса та ордината цієї точки. Тому **, , , ctg t** є функціями змінної  **,** яка набуває значень з множини дійсеих чисел. Їх називають ***тригонометричними функціями.*** Знаки значень тригонометричних функцій числа визначаються положенням точки

***Синус і косинус*** довільного числа ми визначили геометрично. Тангенс і котангенс ввели як деякі відношення синуса і косинуса. Проте їх також можна охарактеризувати геометрично.



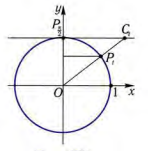
***Рис.11***

Пряма, що проходить через точку з координатами (1;0) перпендикулярно до осі абсцис(вісь ***ох***) , називається лінією тангенсів.(рис.11).

Лінія тангенсів має рівняння ***х =1*;** її можна вважати координатною прямою з напрямом і масштабом осі ***у***і з початком у точці ***А.***

***Кожному числу (2n+1), nєZ, можна поставити у відповідність точку на лінії тангенсів, яка є точкою перетину прямої з лінією тангенсів.***

Пряма, що проходить через точку з координатами (0;1) перпендикулярно до осі ординат(вісь ***оу***) , називається лінією котангенсів.(рис.12).

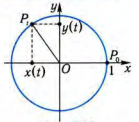


***Рис.12***

Лінія котангенсів має рівняння ***у=1*;** її також можна вважати координатною прямою з напрямом і масштабом осі ***х***і з початком у точці ***.***

**3. Знаки значень тригонометричних функцій.**

***Синус*** числа – це ордината(***вісь у***) точки (мал.13)



***Рис.13***

Додатними є ординати тих точок , які розміщені над віссю абсцис ***(вісь ох),*** тобто знаходяться у першій чи другій чверті. Якщо точка розташована під віссю абсцис, тобто в третій або у четвертій чверті, то її ордината є від’ємною.(рис.14, а)



а б в

***Рис.14***

* **Синус набуває додатних значень у першій і другій чвертях, а відємних – у третій і четвертій.**

***Косинус*** числа  **–** це абсциса ***(вісь х)*** точки . (мал.13)

Додатними є абсциси тих точок, які розміщені правіше від осі ординат

(***вісь оу)***, тобто знаходяться у першій чи у четвертій чверті. Якщо точка розташована лівіше від осі ординат, тобто у другій або у третій чверті, то її абсциса є від’ємною. .(рис.14, б)

* **Косинус набуває додатніх значень у першій і четвертій чвертях, а від’ємних – у другій і третій чвертях.**

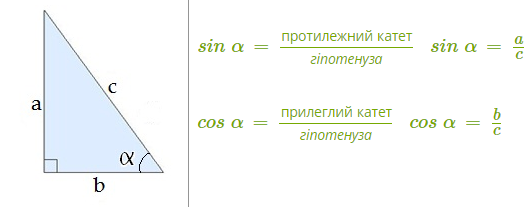
Згідно з означенням, **,** , тому  **і с** набувають додатних значень, якщо **, ,** мають днакові знаки. (рис.14, в)

Відповідно,  **і с** набувають від’ємних значень, якщо **, ,**  мають різні знаки.

* **Тангенс і котангенс набувають додатних значень у першій і третій чвертях, а від’ємних – у другій і четвертій.**
* **Розв’язування вправ до даної лекції**

**Узагальнення до лекції:**

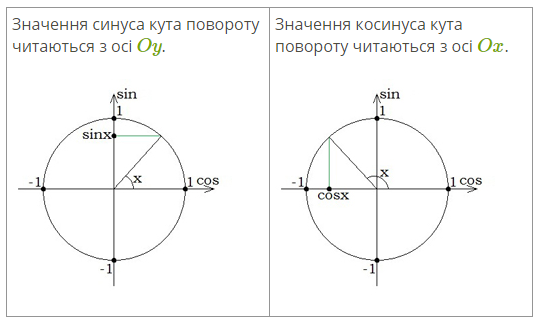
Синус і косинус гострого кута прямокутного трикутника визначається так:



***Рис.15***

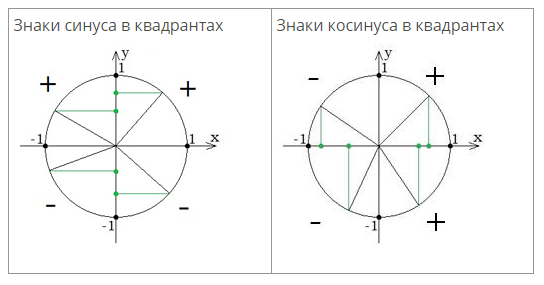
Яке відношення одиничне коло має до цих тригонометричних функцій?

Одиничне коло можна використовувати, як інструмент для зчитування значень тригонометричних функцій.



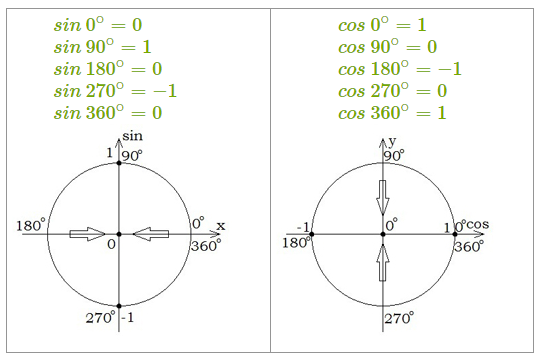
***Рис.16***

Найчастіше одиничне коло використовується для визначення знака тригонометричної функції, числові значення знаходяться в таблицях або обчислюються за допомогою калькулятора.



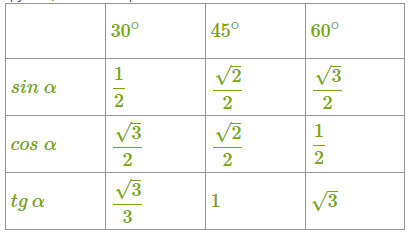
***Рис.17***

Важливо вміти зчитувати з кола наступні значення синуса і косинуса:



***Рис.18***

Значення тригонометричних функцій, які потрібно знати напам'ять.



***Рис.19***

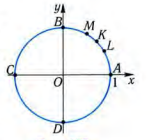
**Розв’язування вправ:**

**Задача1**

Зобразити на тригонометричному колі точки, що відповідають числам ; ;

**Розв’язання:**

Поділимо дугу ***АВ,*** довжина якої дорівнює, навпіл точкою ***К,*** на три рівні частини – точками ***L і M. (рис.20)***



***Рис.20***

Тоді довжини дуг ***AL, AK, AM*** відповідно дорівнюють ; ; .

Відтак числу відповідає точка ***L***, числу  **–** точка ***К,*** числу  **–** точка ***М.***

Ці точки можна відповідно позначити через .

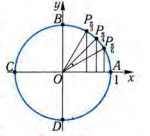
**Задача2**

Знайти прямокутні координати точок **.**

**Розв’язання:**

Для точки розв’язання зводиться до знаходження катетів прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 1, а один з гострих кутів становить

(рис.21)



***Рис.21***

Катет, що лежить навпроти кута **,** дорівнює  **,** а прилеглий катет дорівнює:

Отже, координати точки

Аналогічно знаходяться координати точки

Знаходження координат точки зводиться до знаходження катетів прямокутного рівнобедреного трикутника , гіпотенуза якого дорівнює 1. Його катети дорівнюють ***: ;***

Отже

Відповідь:**; ;**

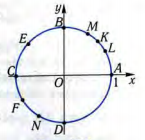
**Задача3**

Зобразити на тригонометричному колі точки, що відповідають числам:

**-**

**Розв’язання:**

Побудову виконуватимемо, користуючись рисунком 20 (задача 1). Відкладемо тричі від точки ***А*** дугу ***АК*** (***точки К, L, M визначені у задачі 1)*** у додатному напрямі (її довжина дорівнює ). Одержимо точку ***Е*** – середину дуги ***ВС(***рис.22).



***Рис.22***

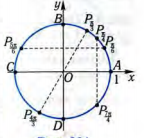
Вона і відповідатиме числу ***3***. Відклавши дугу ***АL*** (її довжина дорівнює ) від точки ***А*** у від’ємному напрямі 5 разів, матимемо точку ***F***, яка відділяє третю частину дуги ***СD.*** Ця точка і відповідає числу ***5***. Далі відклавши дугу ***АМ*** (її довжина дорівнює **)** від точки ***А*** у додатному напрямі 4 рази, одержимо точку ***N***, яка відділяє дві третини дуги ***СD.*** Ця точка і відповідає числу **.** Нарешті, беручи до уваги, що , дійдемо висновку, що числу відповідає точка ***L.***  Якби ми відклали від точки ***А*** у додатному напрямі 25 разів дугу ***АL,*** то мали б той самий результат.

**Задача 4.**

Знайти прямокутні координати точок

**Розв’язання:**

Побудуємо дані точки.(рис.23)



***Рис.23***

Їхні координати за модулем збігаються відповідно з координатами точок які знайдено у задачі 2. Слід лише визначити їхні знаки.

Точка знаходиться у другій координатній чверті, тому її абсциса від’ємна, а ордината додатня. Відтак,  **(** Аналогічно одержуємо :

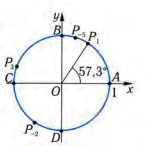
**(**

**(**

**Задача 5.**

Зобразити на тригонометричному колі точки, що відповідають числам 1, -2, 3, -5

**Розв’язання:**



***Рис.24***

Числу **1** відповідає точка яка розміщена на дузі ***АВ*** ближче до точки ***В***, бо довжина дуги ***АВ*** дорівнює або приблизно **1,5**. Щоб уточнити її положення, відкладемо від точки ***А*** у додатному напрямі ***кут в 1 рад***, який наближено дорівнює (рис.24). Його можна побудувати за допомогою транспортира. Для побудови точки що відповідає числу -2, відкладемо від точки ***А*** у від’ємному напрямі дугу в 2 рад. Відповідний кут наближено дорівнює

(рис.24). Ця точка знаходиться на дузі ***СD*** ближче до точки ***D***. Аналогічно будується точка що відповідає числу **3**. Вона знаходиться на дузі ***ВС*** ближче до точки ***С*** ( точка ***С*** відповідає числу Числу **-5** відповідає та сама точка, що й числу **-5+2.** Щоб її побудувати , відкладемо від точки ***А*** у додатному напрямі дугу в ***1,28 рад***. Відповідний кут наближено дорівнює

Точка знаходиться на дузі ***АВ*** ближче до точки ***В*** (точка ***В*** відповідає числу **.**

* Відповідність між дійсними числами і точками тригонометричного кола, не є взаємно однозначною. Наприклад, якщо розглянути числа **; ;**

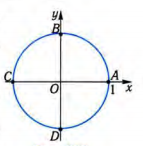
то положення точки для ***n = 0, 1, 2…..***одне й те саме – точка  **,** тобто точка відповідає нескінченній кількості чисел **,** Це саме положення иають і точки, які відповідають числам

Таким чином, точка відповідає числам ***, n є Z*.**

**Задача 6.**

Знайти значення тригонометричних функцїй чисел ***0; ; ;; 2***

**Розв’язання:**



***Рис.25***

Для розв’язання задачі потрібно знайти прямокутні координати точок тригонометричного кола , які відповідають зазначеним числам, тобто точок

***А=* ;**

***В*= ;**

**С =;**

**D =** (рис.25) Враховуючи, що радіус тригонометричного кола дорівнює 1, маємо: ***(1;0), (0;1), (-1;0), (0;-1).***

Отже,

***, –*** не існують.

***–***не існують, бо на нуль ділити не можна.

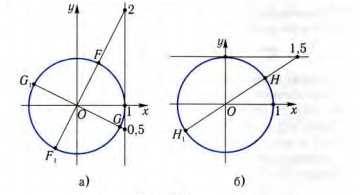
**Задача 7.**

Зобразити на тригонометричному колі точки якщо:

1. *;* 2) ; 3)

**Розв’язання:**

1) Відкладемо на лінії тангенсів у додатному напрямі відрізок, що дорівнює 2 (радіус кола дорівнює 1). Через отриману точку і центр тригонометричного кола проведемо пряму. Точки ***F і***  перетину цієї прямої з колом і будуть шуканими (рис.26, а).



***Рис.26***

2)У від’ємному напрямі лінії тангенсів відкладемо відрізок завдовжки 0,5. Далі задача розв’язується аналогічно попередній. Точки ***G і***  є шуканими (рис.26, а).

3)Відрізок завдовжки 1,5 відкладаємо у додатному напрямі лінії котангенсів. Далі задача розв’язується аналогічно попередній. Точки ***H і***  є шуканими. (рис.26, б).

* **Домашнє завдання**

**Задача1**

Зобразіть на тригонометричному колі точки, що відповідають числам:

1. ***- - -***
2. ***1,5; 2,3***
3. ***5;***

**Задача2**

Знайдіть прямокутні координати точок:

1. ***; ; ; 2) ;***

**Задача3**

Знайдіть координати точки тригонометричного кола, яку одержимо при обертанні точки (1;0) на кут:

1. 3; 2) -2 3) 4,5 4) ; 5)

**Задача 4**

Дано координати точки **,** на тригонометричному колі. Обчисліть **; ; :**

1. **(; - 2) (- 3) (-; 4) ()**

**Задача 5**

Визначте знаки тригонометричних функцій **; ;** для ***t***, що дорівнює:

1. 2**)** 3)

* **Запитання для самоконтролю:**

1. Сформулюйте означення тригонометричних функцій гострого кута в прямокутному трикутнику.
2. Сформулюйте означення тригонометричних функцій довільного кута:

а) використовуючи коло радіуса R із центром у початку координат;

б) використовуючи одиничне коло.